Питања за обраду:

1) Шта је комбинаторика?
2) Који су основни задаци комбинаторике?
3) Који су основни принципи комбинаторике?
4) Шта су пермутације, варијације и комбинације?
5) Шта је n! у математици? (n! чита се “ен факторијел”)

Нека је S скуп од коначно много елемената.

Пример1. $S_1 = \{A, B, C, D, E, \dots ,X, Y, Z\}$
$S_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots ,8, 9\}$
S_3 = {шпил карата за игру}
S_4 = {две коцкице за игру}
S_5 = {књиге на полици}
S_6 = {играчи једног тима}

елементе ових скупова зовемо симболи (слова)

Дефиниција1. Ниска симбола једног скупа јесте <u>реч</u> (распоред)

Пример2. AA, AAAB, XAAYZ, … на скупу S_1
000, 101, 123005, ... на скупу S_2

Дефиниција2. Број симбола у речи одређује <u>дужину речи</u> (разред или класа речи)

У комбинаторици нас интересују речи одређене дужине.

Пример3. Над скупом $S = \{A, B, C\}$ формирати све речи дужине 2 у којој се
а) слова понављају
б) слова не понављају

решење:

а) AA AB AC
BB BA BC
CC CA CB

б) AB AC
BA BC
CA CB

Пример4. Над скупом $S = \{0, 1\}$ формирати све речи дужине 3 у којој се
а) слова понављају
б) слова не понављају

решење:

а) 000 001 010 011 100 101 110 111
б) празан скуп

Комбинаторика је грана математке чији су основни задаци:

- формирати све речи (распореде) одређене дужине (класе) над скупом S
- одредити број свих тих распореда

Први задатак се решава према унапред утврђеном правилу за формирање ниске симбола у распореду. Обично је то лексикографски редослед, ако су слова у питању (растући редослед). При томе, тачно се зна редни број неког одређеног распореда фиксне дужине у скупу свих могућих распореда те дужине.

Други задатак се решава према основним принципима комбинаторике, а то су <u>принцип збира</u> и <u>принцип производа</u>

Пример5. Одредити на колико начина се може добити збир 9 или 11, приликом бацања двеју коцкица за игру.

решење:

А	Б		
3	6	4 начина	4+2 = 6 начина
4	5		
5	4		
6	3		
5	6	2 начина	
6	5		

Принцип збира: Ако су $|A| = a$ и $|B| = b$ укупно начина да се реализују, редом, догађаји А и В, онда је укупан број начина да се реализује догађај А или догађај В, једнак збиру $a + b$.

Аналогно се дефинише принцип збира за n догађаја (чија реализација је алтернативна).

Пример6. Ако од места A до места B постоје 4 пута, а од места B до места C 3 пута, на колико начина се може стићи из места A у место C преко места B?
решење:

	1		a		1a 1b 1c	
A	2	B	b	C	2a 2b 2c	$4 \cdot 3 = 12$ начина
	3		c		3a 3b 3c	
	4				4a 4b 4c	

Принцип производа: Ако су |A| = a и |B| = b укупно начина да се реализују, редом, догађаји A и B, онда је укупан број начина да се реализује догађај A, а затим, догађај B, једнак производу $a \cdot b$. Аналогно се дефинише принцип производа за n догађаја (чија реализација је у низу "један за другим").

Задаци: (Ове задатке ученик би требао да реши применом принципа комбинаторике)

(1) а) колико се троцифрених бројева завршава цифром 3?
б) колико има троцифрених бројева дељивих са 5?

(2) На правој p дато је 5 различитих тачака A, B, C, D и E. Колико има и које су то дужи чији су крајеви дате тачке?

(3) Дат је скуп тачака међу којима никоје три тачке нису колинеарне. Колико тачака садржи тај скуп ако је број правих одређених тим тачкама два пута већи од броја тачака?

(4) Нека је A={a, b, c} и B={1, 2}. Колико има различитих пресликавања скупа A у скуп B?

Нека је S скуп који има n елемената, и нека је k дужина распореда (класа)

Типови распореда (класа)

елементи у распореду	који се понављају	који се не понављају	$k = n$
код којих је битан редослед	варијације са понављањем	варијације без понављања	пермутације
код којих није битан редослед	комбинације са понављањем	комбинације без понављања	

Одређивање броја распореда k -те класе од n елемената, према принципу производа, биће:

$\overline{V}_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k$ број варијација са понављањем

$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$ број варијација без понављања

$P_n = V_n^n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1 = n!$ број пермутација без понављања

$C_n^k = \dfrac{V_n^k}{P_k} = \dfrac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$ број комбинација без понављања

Број комбинација са понављањем остаје за упознавање у четвртом разреду.

(*) Задаци за вежбу су из групе нешто сложенијих (жутих) задатака

1. Дати су четворочлани скупови A={a, b, c, d} и M={1, 2, 3, 4}. Колико има 1-1 и НА пресликавања $f : A \to M$?
2. Дате су три праве и на свакој од њих по пет тачака. Колико највише има троуглова чија су темена дате тачке?
3. На колико начина 8 ученика може сести на:
а) 6 различитих столица; б) 12 различитих столица?
4. Колико има 100-цифрених природних бројева који се могу записати помоћу цифара 0, 2 и 3?
5. На полици се налази 15 књига, од којих су 7 на руском, 3 на енглеском и 5 на француском језику. На колико различитих начина се могу распоредити књиге на полици, ако се књиге на истом језику морају налазити једна уз другу?

R1. A={a, b, c, d} и M={1, 2, 3, 4}. $f : A \to M$ ће бити 1-1 ако различитим елементима скупа A одговарају различити елементи скупа M. Сликовитије, то значи да ће елементи скупа A да "бирају" различите елементе скупа M, и то:

a има, на располагању, 4 елемента у скупу M, b има 3 елемента у скупу M на располагању, c 2 елемента и d 1 елемент на располагању. Овакав облик догађаја (бирање вредности из скупа M), према принципу производа, може да се реализује на 4*3*2*1=24 начина, што говори да има укупно 24 пресликавања која су 1-1.

$f : A \to M$ ће бити NA, ако су сви елементи скупа M "покривени" елементима скупа A. Сликовитије, то значи да ће елементи скупа M да "бирају" елементе скупа A, и то:

1 има, на располагању, 4 елемента у скупу A, 2 има 3 елемента у скупу A на располагању, (а на питање, а зашто нема 4 елемента на располагању, одговор је: онда то не би било 1-1 пресликавање), дакле, за 2 преостају 2 елемента и за 1, један елемент у скупу A, па је према принципу производа укупан број NA пресликавања једнак 24. Ако би скуп A имао више елемената него скуп M, онда би био и већи број NA пресликавања, али која тада не би била 1-1, а ако би скуп A имао мање елемената од скупа M, онда не би имали ниједно NA пресликавање. Дакле, укупан број 1-1 и NA пресликавања је 24.

други начин: $f : A \to M$, можемо представити овако: $f : \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$ Доњи ред у табели , уместо упитника треба заменити елементима из M. Сликовито, у доњем реду треба формирати "реч" дужине 4 од елемената скупа M, тако да се елементи не понављају. Та "реч" јесте варијација без понављања, чији је укупан број $V_4^4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

R2. Обележимо са p_1 , p_2 и p_3 , три праве. а са a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , a_5 ,затим, b_1 , b_2 , b_3 , b_4 , b_5 и c_1 , c_2 , c_3 , c_4 , c_5 њихове тачке. Троугао можемо формирати користећи тачке на правама на следећи начин:

Када ове тачке не би припадале правама, тј. када би све "тројке" биле неколинеарне, онда би укупан број троуглова био једнак броју комбинација без понављања C_{15}^3, али пошто на једној правој имамо 5 колинеарних тачака онда оне умањују укупан број троуглова за C_5^3. А како су три такве праве, онда је укупан број троуглова једнак $C_{15}^3 - 3C_5^3 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!} - 3\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{6} - 3\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{6} = 5 \cdot 7 \cdot 13 - 30 = \underline{425}$

R3. а) Један ученик може сести само на једну столицу, према томе, то је исти услов као код дефиниције пресликавања (скупа ученика на скуп столица) али, пошто је већи број ученика него столица, онда немамо ниједно пресликавање (скупа ученика на скуп столица) тј. не могу ученици да бирају столице. Обрнуто, да "столице бирају ученике" тј. да пресликавамо скуп столица у скуп ученика, то је изводљиво. Тако прва столица има на располагању 8 ученика, затим, друга столица 7 ученика, трећа 6 ученика и тд. док свака столица не изврши избор, тако да је укупан број начина, према принципу производа, једнак

$8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 20160$

b) Ситуација је обрнута, пошто је већи број столица него ученика, онда ће ученици бирати столице, па можемо приметити да ће то бити број варијација без понављања од 12 елемената 8-е класе, дакле, $V_{12}^8 = 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 19958400$

R4. $\begin{pmatrix} 100 & 99 & 98 & \cdots & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \end{pmatrix}$ Ако доњи ред у табели попуњавамо, с десна у лево, бројем могућности за избор цифре из скупа $\{0,\ 2,\ 3\}$, онда је укупан број 100-цифрених бројева, према принципу производа једнак $2 \cdot 3^{99}$.

R5. Према услову задатка, да се књиге на различитим језицима не мешају, у оквиру сваке групе књига, књиге можемо премештати (пермутовати) како хоћемо. Тако у групи руских књига то можемо урадити на $7!$ начина, групи енглеских књига на $3!$ начина, и у групи француских књига на $5!$ начина. Према принципу производа, укупан број начина да књиге стоје у овом распореду (руске, енглеске па француске) једнак је $7! \cdot 3! \cdot 5!$, али пошто имамо три групе књига, онда и те групе можемо пермутовати на $3!$ начина, тако да је коначан број начина да се књиге распореде на полици једнак

$7! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 3! = 21772800$

проф. И. Јоксимовић