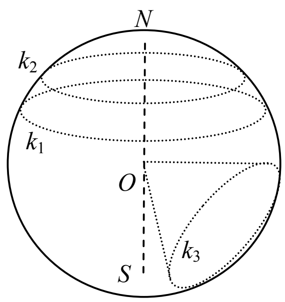
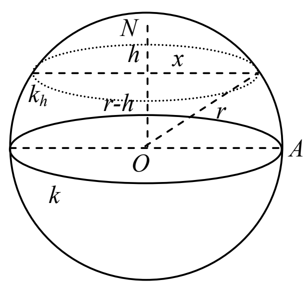
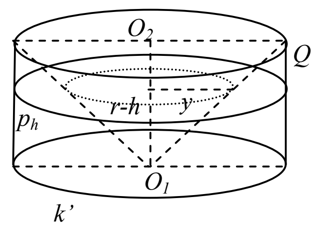
Лопта и делови лопте[1]



Површ лопте зове се ***сфера***. Део сфере између круга k_2 и пола N зове се ***калота***, а део сфере између кругова k_1 и k_2 зове се ***појас*** (***зона***). Са друге стране, део лопте између круга k_2 и пола N зове се ***одсечак***, као и део лопте између кругова k_1 и k_2. Део лопте са одсечком над кругом k_3 и купом чији је врх у центру O лопте, зове се лоптин ***исечак***.

Посматрајмо плоулопту $\frac{L}{2}$ са кругом k у основи, и ваљак v са кругом k' у основи, исте површине као k. Нека је r полупречник тих кругова. Нека је висина ваљка једнака r. Ако из ваљка v издвојимо купу чија је основа у горњој основи ваљка, а врх у центру доње основе, онда је запремина тако добијеног тела једнака запремини полулопте. Докажимо то.





Заиста, било која раван π паралелна равни основе кругова k и k' и на истом одстојању $r-h$ од њих сече полулопту по кругу k_h, а тело на ваљку по кружној прстенастој површи p_h. Покажимо да је површина круга k_h једнака површини кружног прстена p_h.

$$\begin{aligned} x^2 &= r^2 - (r-h)^2 \\ &= r^2 - r^2 + 2rh - h^2 \\ &= h(2r-h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_h &= x^2\pi \\ &= h\pi(2r-h) \end{aligned}$$

Пошто је ΔO_1O_2Q једнакокрак, онда је

$$y = r-h$$

$$\begin{aligned} P_h &= \left(r^2 - y^2\right)\pi \\ &= \left(r^2 - (r-h)^2\right)\pi \\ &= h\pi(2r-h) \end{aligned}$$

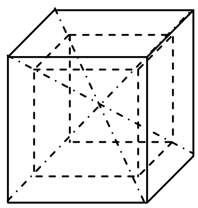
Сада су сви услови за примену Кавалијеријевог принципа испуњени, па је према томе, $V_{\frac{L}{2}} = V_v - V_k = r^2\pi \cdot r - \frac{1}{3}r^2\pi \cdot r = \frac{2}{3}r^3\pi$. А запремина лопте је $V_L = \frac{4}{3}r^3\pi$.

На исти начин можемо доћи до запремине лоптиног одсечка. (код истих тела, овај пут се из ваљка висине h, издвоји зарубљена купа висине h)

$$\begin{aligned} V_O &= V_{v_h} - V_{zk} = r^2\pi \cdot h - \tfrac{h\pi}{3}(r^2 + rx + x^2) = r^2\pi \cdot h - \tfrac{h\pi}{3}(r^2 + r(r-h) + (r-h)^2) \\ &= r^2\pi \cdot h - \tfrac{h\pi}{3}(3r^2 - 3rh + h^2) = \pi \cdot h(r^2 - r^2 + rh - \tfrac{h^2}{3}) = h^2\pi(r - \tfrac{h}{3}) \end{aligned}$$

1- за потпуно коришћење садржаја, потребан је читач PDF фајла који располаже Javascript подршком; такав је нпр. FoxitReader - бесплатан!

Нешто је теже одредити површину лопте. Али, ако би ову наставну јединицу радили бар, иза наставне јединице о граничној вредности низа бројева, и направили одговарајућа поређења лопте и коцке, онда би решење било разумљивије.
Посматрајмо коцку чија је ивица a. Премажемо ли коцку танким слојем лака, имаћемо (лакирану коцку, не већ) коцку са незнатно увећаном запремином. Ако дебљину лака означимо са $\varepsilon\ (>0)$ онда је ивица лакиране коцке $a_1 = a + 2\varepsilon$.

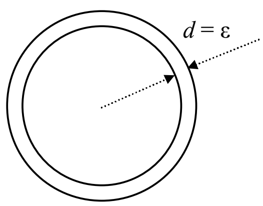


Израчунајмо запремину слоја (премаза лака). То ће бити:

$$V_{a_1} - V_a = a_1^3 - a^3 = (a+2\varepsilon)^3 - a^3 = a^3 + 6a^2\varepsilon + 12a\varepsilon^2 + 8\varepsilon^3 - a^3$$
$$= 6a^2\varepsilon + 12a\varepsilon^2 + 8\varepsilon^3 = \varepsilon\left(6a^2 + 12a\varepsilon + 8\varepsilon^2\right).$$

Поделимо ову једнакост са ε. Добијамо једнакост облика: $\dfrac{V_{a_1} - V_a}{\varepsilon} = 6a^2 + 12a\varepsilon + 8\varepsilon^2$

Што је вредност $\varepsilon\ (>0)$ мања (и мања...) то ће количнк, на левој страни ове једнакости, тежити ка вредности $6a^2$, на десној страни. Познато нам је да је површина коцке чија је ивица a, заправо, $6a^2$. Водећи се аналогијом сличности између коцке и лопте (тополошка сличност) применићемо исти поступак код лопте.



Сада смо лопту полупречника r премазали танким слојем лака дебљине ε.
Нови полупречник лопте биће: $r_1 = r + \varepsilon$.
Израчунајмо запремину слоја (премаза лака). Биће:

$$V_{r_1} - V_r = \tfrac{4}{3}r_1^3\pi - \tfrac{4}{3}r^3\pi = \tfrac{4}{3}\pi\left[(r+\varepsilon)^3 - r^3\right]$$
$$= \tfrac{4}{3}\pi\left[r^3 + 3r^2\varepsilon + 3r\varepsilon^2 + \varepsilon^3 - r^3\right] = \tfrac{4}{3}\pi 3\varepsilon\left[r^2 + r\varepsilon + \tfrac{\varepsilon^2}{3}\right]$$

Поделимо ову једнакост са ε. Добијамо једнакост облика:

$\dfrac{V_{r_1} - V_r}{\varepsilon} = 4\pi\left(r^2 + r\varepsilon + \tfrac{\varepsilon^2}{3}\right)$.Што је вредност $\varepsilon\ (>0)$ мања (и мања...) то ће количнк на левој страни ове једнакости тежити ка вредности $4r^2\pi$, на десној страни. Дакле, вредност добијеног израза би требало да је површина лопте .

(417) Лопта полупречника R додирује све странице једнакостраничног троугла странице a. Наћи одстојање центра лопте од равни троугла.

идеја

одговор

(414) Две једнаке лопте полупречника су постављене тако да центар једне припада површи друге. Наћи дужину линије по којој се лопте секу.

идеја

одговор

(415) Раван садржи крајњу тачку полупречника лопте (дужине R) и гради са њим угао од $60°$. Наћи површину пресека лопте и равни.

идеја

одговор

(416) Раван садржи средиште полупречника лопте и нормална је на тај полупречник. У ком односу су површина тако добијеног пресека и површина великог круга лопте?

идеја

одговор

(418) Лопта са центром у врху купе која додирује основу купе дели омотач купе на два дела једнаких површина. Колики је угао између изводнице и висине купе?

идеја

одговор

(420) Странице троугла ABC су a, b, c. Наћи полупречнике сфера које додирују раван троугла ABC у тачкама A, B, C и које се додирују међусобно.

идеја

одговор

примена Питагорине теореме

(426) Раван додирују четири лопте: две полупречника r и две полупречника x тако да свака лопта додирује преостале три. Израчунати x.

идеја

одговор

(427) Лопта је уписана у коцки ивице a. Колико је пута површина коцке већа од површине лопте?

идеја

одговор

(428) Сфера је пресечена са две паралелне равни чије је међусобно одстојање 3 cm и налазе се са исте стране центра сфере. Те равни секу сферу по круговима полупречника 9 cm и 12 cm. Израчунати површину сфере.

идеја

одговор

(429) Израчунати површину појаса лопте полупречника $R = 65$ cm ако су полупречници граничних кругова појаса $r_1 = 33$ cm и $r_2 = 25$ cm. (Површина појаса је $P_p = 2R\pi h$, где је R полупречник лопте, а h висина појаса)

идеја

одговор

(430) Висина зоне је 7 cm, а полупречници основа 16 cm и 33cm. Израчунати површину зоне.

идеја

одговор

(431) На којој удаљености од центра непрозирне лопте полупречника 4 cm треба поставити сијалицу да би она осветлила $1/3$ површине лопте?

идеја

одговор

(432) Тачкасти извор светлости удаљен је 4 m од центра лопте полупречника 2 m. Колика је површина осветљеног дела лопте?

идеја

одговор

(437) У праву купу полупречника основе $r = 5\,\mathrm{cm}$ и висине $h = 12\,\mathrm{cm}$ уписана је лопта. Наћи запремину лопте.

идеја

одговор

(443) Права купа постављена је на врх; њена висина је $H = 16\,\mathrm{cm}$, а полупречник основе је $R = 6\,\mathrm{cm}$ и испуњена је водом до висине $h = 12\,\mathrm{cm}$. У њу се потопи лопта полупречника $r = 3\,\mathrm{cm}$. До које висине се дигне ниво воде?

идеја

одговор

(447) Бочна ивица правилне тростране призме је $b = 4\,\mathrm{m}$, а основна ивица је $a = 3\,\mathrm{m}$. Наћи полупречник лопте описане око те призме.

идеја

одговор

(448) Висина правилне четворостране призме је $2\,\mathrm{cm}$, а основна ивица је $4\,\mathrm{cm}$. Одредити полупречник лопте описане око призме.

идеја

одговор

(449) Правилна четворострана пирамида има све ивице дужине $\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. Израчунати полупречник уписане сфере.

идеја

одговор

(tangenta 46 2006/2007 – 2)

(450) У правилну тространу призму уписана је лопта. Наћи однос површина лопте и призме.

идеја

одговор

(451) У правилној тространој призми основне ивице a уписана је лопта. Израчунати површину и запремину оба тела.

идеја

одговор

(452) Основна ивица правилне четворостране пирамиде је a, бочна ивица је $\frac{3a\sqrt{2}}{2}$. Израчунати запремину пирамиде и полупречник лопте која је око ње описана.

идеја

одговор

(453) Описани кругови око основа зарубљене правилне тростране пирамиде имају полупречнике $r_1 = 12$ и $r_2 = 9$. Ако је висина те пирамиде $H = 21$, одредити површину лопте описане око те пирамиде.

идеја

одговор

(454) Прав кружни ваљак описан је око лопте. Одредити однос површина и однос запремина тих тела.

идеја

одговор

(455) У лопти површине $\pi\ \mathrm{m}^2$ уписан је ваљак чији осни пресек има површину $48\ \mathrm{dm}^2$. Одредити површину и запремину ваљка.

идеја

одговор

(456) Омотач зарубљене купе једнак је површини круга чији је полупречник изводница купе. Доказати да се у зарубљеној купи може уписати лопта.

идеја

одговор

(457) Око лопте полупречника r описана је права кружна купа висине $4r$. Наћи однос запремина лопте и купе.

идеја

одговор