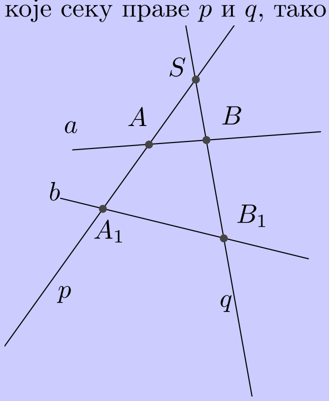
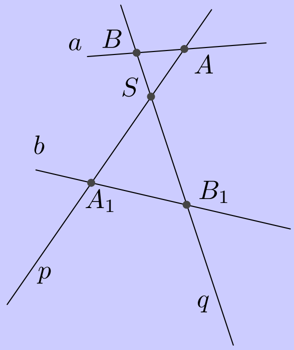
Талесова[1] теорема и примене - неки задаци из збирке

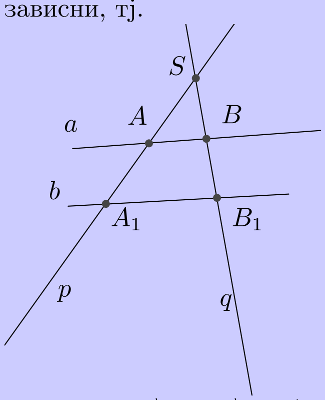
Дефиниција 1: Нека су a и b две дужи чије су дужине изражене преко мерне јединице $k > 0$, тако да је $a = m \cdot k$ и $b = n \cdot k$, где су $m, n > 0$. Тада кажемо да су дужи a и b у размери $m : n$, и пишемо $a : b = m : n \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{m}{n}$.
Дефиниција 2: За пар дужи a и b које су у размери као неки други пар дужи c и d кажемо да су пропорционалне и пишемо $a : b = c : d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.
Нека су AB и CD две произвољне дужи које су у размери $k > 0$, тј. важи, рецимо $AB = k \cdot CD$.
Поставља се питање, да ли можемо да пишемо, $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD}$?
Одговор је, под условом да су вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ колинеарни, тј. (да је $AB \| CD$), и да су истог смера, јер $k > 0$.
Талесова теорема: Нека су p и q две праве које се секу $p \cap q = \{S\}$, и нека су a и b две праве које секу праве p и q, тако да је $p \cap a = \{A\}$, $p \cap b = \{A_1\}$, $q \cap a = \{B\}$ и $q \cap b = \{B_1\}$.

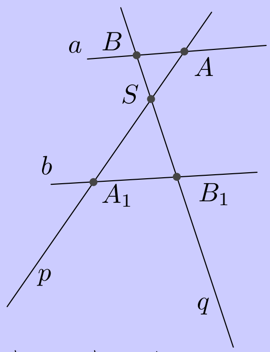




Тада важи: $a \parallel b \Leftrightarrow \frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{A_1B_1}{AB}$.

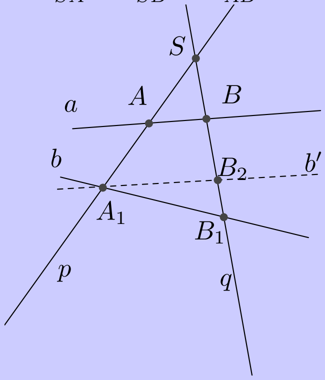
доказ: ($\Rightarrow$) Нека је $a \parallel b$, тј. према слици, вектори $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{A_1B_1}$ су колинеарни, па су линеарно зависни, тј.

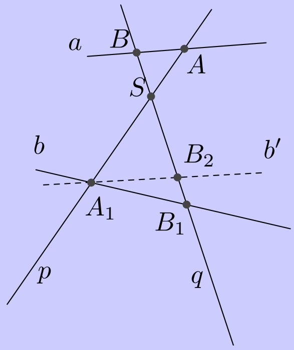




постоји $k \neq 0$ тако да је $\overrightarrow{A_1B_1} = k \cdot \overrightarrow{AB}$.
Према слици је,
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}$ и $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{SB_1} - \overrightarrow{SA_1}$, па је $\overrightarrow{SB_1} - \overrightarrow{SA_1} = k \cdot (\overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA})$, тј. $\overrightarrow{SB_1} - \overrightarrow{SA_1} = k \cdot \overrightarrow{SB} - k \cdot \overrightarrow{SA}$, односно,
$k \cdot \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SA_1} = k \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SB_1}$.
Како су вектори на левој страни једнакости на двема различитим правама p и q, и при томе једнаки, то значи да могу бити једнаки само ако су нула-вектори.

Дакле, $k \cdot \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SA_1} = \overrightarrow{0}$ и $k \cdot \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SB_1} = \overrightarrow{0}$. Тако је $\overrightarrow{SA_1} = k \cdot \overrightarrow{SA}$ и $\overrightarrow{SB_1} = k \cdot \overrightarrow{SB}$, односно важи, $|\overrightarrow{SA_1}| = |k| \cdot |\overrightarrow{SA}|$ и $|\overrightarrow{SB_1}| = |k| \cdot |\overrightarrow{SB}|$, па важи $\frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{A_1B_1}{AB} (= k)$.
($\Leftarrow$) Обрнуто, претпоставимо да су дате праве као на првој слици, и да важи пропорционалност одговарајућих дужи, тј. $\frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{A_1B_1}{AB} (= k)$, и покажимо да су тада праве a и b паралелне.
Из $\frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB} = \frac{A_1B_1}{AB} (= k)$ следи, $SA_1 = k \cdot SA$, $SB_1 = \cdot SB$ и $A_1B_1 = k \cdot AB$. Према слици,



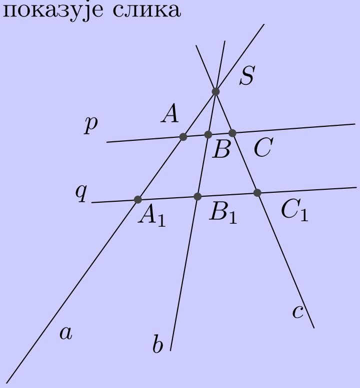


(и аксиоми паралелности) постоји права b' која садржи тачку A_1 и паралелна је правој a.
Означимо ли са $\{B_2\} = q \cap b'$, онда према првом делу теореме ($\Rightarrow$) имамо, $\frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_2}{SB} = \frac{A_1B_2}{AB} (= k)$ што може да буде, само ако је тачка $B_2 \equiv B_1$, што значи да права b мора бити паралелна правој a.

[1] Талес је старогрчки математичар из Милета - пети век пре нове ере

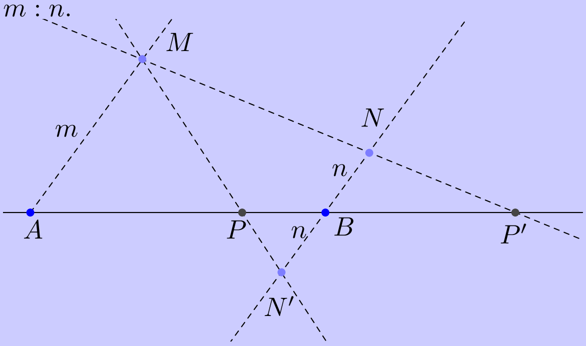
Неке последице Талесове теореме:

Пример 1. Нека су a, b и c три праве које се секу у тачки S, и нека их праве p и q секу као што показује слика



Ако је $\frac{SA_1}{SA} = \frac{SB_1}{SB}$, онда је $\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{SC_1}{SC}$.

Пример 2. На датој правој AB конструисати тачку P која ће делити дуж AB у задатој размери $m : n$.



Према Талесовој теореми, праве AB и MN' ($AB \cap MN' = \{P\}$) пресечене су двема паралелним правама AM и NN', па важи $\frac{AP}{PB} = \frac{AM}{BN'} = \frac{m}{n}$, тј. тачка P дели дуж AB у задатој размери. Са друге стране, праве AB и MN ($AB \cap MN = \{P'\}$), такође, пресечене су двема паралелним правама AM и NN' па важи $\frac{AP'}{P'B} = \frac{AM}{BN} = \frac{m}{n}$.

Тачка P', такође, дели дуж AB у задатој размери. Каже се да тачка P' дели дуж *спољашњом поделом* а тачка P *унутрашњом поделом.*

<u>Напомена</u>: Ако би било $m = n$, тада би $AB \cap MN = \varnothing$, а тачка P би половила дуж AB.

Питања:

1. Ако су AB и CD дужи, шта је $\frac{AB}{CD}$?
2. Ако су $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ вектори, шта је $\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{CD}}$?
3. Шта значи да су дужи AB и CD пропорционалне дужима EF и GH?
4. Да ли је еквиваленција $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow AB = k \cdot CD$ тачна?
5. Талесова теорема
6. Шта је унутрашња, а шта спољашња подела дужи?

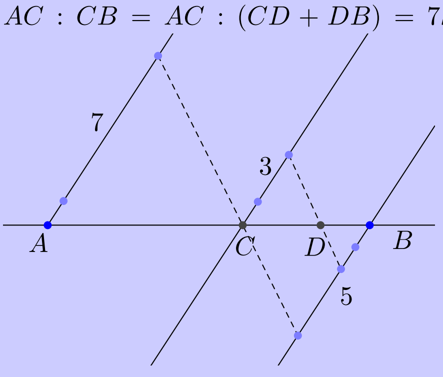
Задаци из уџбеника:

(148-1) Извршити унутрашњу поделу дужи AB у односу $5 : 4$.

(148-2) Извршити унутрашње поделе дужи AB тачакама C и D тако да важи $AC : DB = 7 : 2$ и $AB : CD = 4 : 1$.

решење: Из $AC : DB = 7 : 2 \Leftrightarrow AC = 7k$ и $DB = 2k$, а из $AB : CD = 4 : 1 \Leftrightarrow AB = 4l$ и $CD = l$, и распоред тачака је као на слици: $A - C - D - B$.

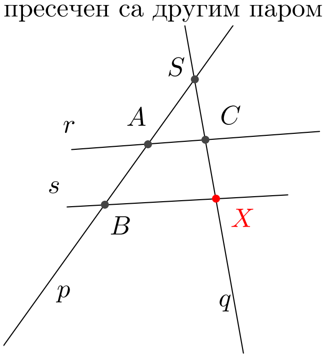
Пошто је $AB = AC + CD + DB \Leftrightarrow 4l = 7k + l + 2k \Leftrightarrow 3l = 9k \Leftrightarrow l = 3k$. Сад можемо одредити $AC : CB = AC : (CD + DB) = 7k : (3k + 2k) = 7 : 5$, такође, $CD : DB = 3k : 2k = 3 : 2$.



(149-8) Теме A троугла ABC је ван листа свеске. Конструисати средиште дужи AB.

(881) Дате су дужи a, b, c. Конструисати дуж x тако да је $a : b = c : x$.

решење:
анализа: Задатак ћемо решити применом Талесове теореме. Скицирајмо слику; пар правих пресечен са другим паром паралелних правих (у истој равни).

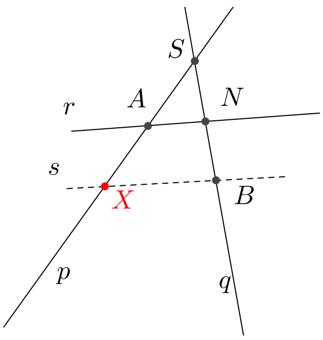


Ставимо $SA = a$, $SB = b$ и $SC = c$. Биће $SX = x$. Права r је одређена тачкама A и C, а права s садржи B и паралелна је правој r. Тачку X добијамо пресеком правих s и q.

конструкција:
1°) $p \cap q = \{S\}$
2°) $A, B \in p$; $SA = a$, $SB = b$
3°) $C \in q$; $SC = c$
4°) $r = (A, C)$, $s \parallel r$, $B \in s$
5°) $s \cap q = \{X\}$.
доказ: Према Талесовој теореми $s \parallel r \Leftrightarrow \frac{SA}{SB} = \frac{SC}{SX} \Leftrightarrow SX = \frac{SB \cdot SC}{SA}$.
дискусија: задатак има једно решење.

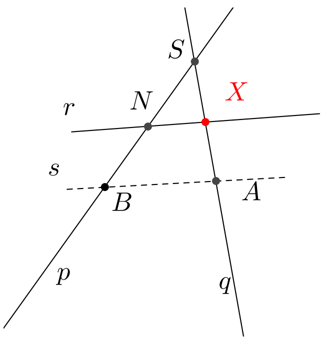
(882) Ако су и дате дужи конструисати дуж:
А) $x = ab$ Б) $x = \frac{a}{b}$ В) $x = \frac{a^2}{b}$

решење:
А) $x = ab$
анализа: $x = ab \Leftrightarrow x : a = b : 1$; $SN = 1$, $SB = b$, $SA = a$
$\frac{SB}{SN} = \frac{SX}{SA}$



конструкција:
1°) $p \cap q = \{S\}$
2°) $N \in q$; $SN = 1$, $B \in q$, $SB = b$
3°) $A \in p$; $SA = a$
4°) $r = (A, N)$, $s \parallel r$, $B \in s$
5°) $s \cap p = \{X\}$.
доказ: Према Талесовој теореми $s \parallel r \Leftrightarrow \frac{SB}{SN} = \frac{SX}{SA} \Leftrightarrow SX = \frac{SA \cdot SB}{SN}$
дискусија: задатак има једно решење.

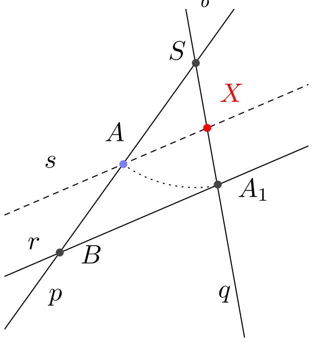
Б) $x = \frac{a}{b}$
анализа: $x = \frac{a}{b} \Leftrightarrow x : a = 1 : b$; $SN = 1$, $SB = b$, $SA = a$
$\frac{SN}{SB} = \frac{SX}{SA}$



конструкција:
1°) $p \cap q = \{S\}$
2°) $N \in p$; $SN = 1$, $B \in p$, $SB = b$
3°) $A \in q$; $SA = a$
4°) $s = (A, B)$, $r \parallel s$, $N \in r$
5°) $r \cap q = \{X\}$.
доказ: Према Талесовој теореми $s \parallel r \Leftrightarrow \frac{SB}{SN} = \frac{SA}{SX} \Leftrightarrow SX = \frac{SA \cdot SN}{SB}$
дискусија: задатак има једно решење.

В) $x = \frac{a^2}{b}$

анализа: $x = \frac{a^2}{b} \Leftrightarrow x : a = a : b$;



Ставимо $SA = a$, $SB = b$, $SA_1 = a$. Биће $SX = x$, $\frac{SA}{SB} = \frac{SX}{SA_1}$

конструкција:

1°) $p \cap q = \{S\}$

2°) $A \in p$; $SA = a$, $B \in p$, $SB = b$

3°) $A_1 \in q$; $SA_1 = a$

4°) $r = (A_1, B)$, $s \parallel r$, $A \in s$

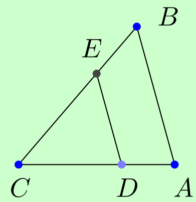
5°) $s \cap q = \{X\}$.

доказ: Према Талесовој теореми $s \parallel r \Leftrightarrow \frac{SA}{SB} = \frac{SX}{SA_1} \Leftrightarrow SX = \frac{SA \cdot SA_1}{SB}$

дискусија: задатак има једно решење.

(884) У троуглу ABC (види слику) дуж $DE \parallel AB$. Наћи:

а) CE, ако је $AC = 12$, $CD = 4$ и $BC = 24$;
б) BE, ако је $AC = 15$, $AD = 3$ и $BC = 25$;
в) BC, ако је $AD = 6$, $CD = 14$ и $CE = 7$;
г) CE, ако је $CD = 8$, $AC = 20$ и $BE = 6$;
д) AC, ако је $AD = CE$, $CD = 4$ и $BE = 9$;



решење:

а) CE, ако је $AC = 12$, $CD = 4$ и $BC = 24$;
Пошто је $DE \parallel AB$, онда према Талесовој теореми имамо, $\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CE} \Leftrightarrow CE = \frac{BC \cdot CD}{AC} = \frac{24 \cdot 4}{12} = 8$.

б) BE, ако је $AC = 15$, $AD = 3$ и $BC = 25$;
Пошто је $DE \parallel AB$, онда према Талесовој теореми имамо, $\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{BE} \Leftrightarrow BE = \frac{BC \cdot AD}{AC} = \frac{25 \cdot 3}{15} = 5$.

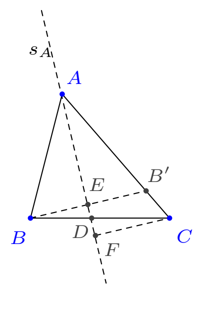
в) BC, ако је $AD = 6$, $CD = 14$ и $CE = 7$;
$AD + DC = AC \Leftrightarrow 6 + 14 = AC \Leftrightarrow AC = 20$. Пошто је $DE \parallel AB$, онда према Талесовој теореми имамо, $\frac{AC}{CD} = \frac{BC}{CE} \Leftrightarrow BC = \frac{AC \cdot CE}{CD} = \frac{20 \cdot 7}{14} = 10$.

г) CE, ако је $CD = 8$, $AC = 20$ и $BE = 6$;
$DA = CA - CD = 20 - 8 = 12$, док је према Талесовој теореми, с обзиром да је $DE \parallel AB$,имамо, $\frac{CD}{DA} = \frac{CE}{EB} \Leftrightarrow CE = \frac{EB \cdot CD}{DA} = \frac{28 \cdot 6}{12} = 4$.

д) AC, ако је $AD = CE$, $CD = 4$ и $BE = 9$;
$AD + DC = AC \Leftrightarrow CE + 4 = AC$ (1). Пошто је $DE \parallel AB$, онда према Талесовој теореми имамо, $\frac{AD}{CD} = \frac{BE}{CE} \Leftrightarrow \frac{CE}{4} = \frac{9}{CE} \Leftrightarrow (CE)^2 = 36 \Leftrightarrow CE = 6$. Тада из (1) имамо, $AC = 6 + 4 = 10$.

(886) Симетрала унутрашњег угла $\triangle ABC$ код темена A дели наспрамну страницу BC на одсечке пропорционалне осталим двема страницама, тј. $AB : AC$. Доказати.

решење:



Нека је s_A симетрала унутрашњег угла $\triangle ABC$ код темена A, и $s_A \cap BC = \{D\}$. Нека је $BB' \perp s_A$, $BB' \cap s_A = \{E\}$. Затим, $CF \perp s_A$. Најпре, покажимо да је $\triangle AEB \cong \triangle AEB'$. Ова подударност следи на основу става (USU); $\angle BAE = \angle B'AE$, $AE = AE$, $\angle AEB = \angle AEB'$ (оба права). Одавде следи $BE = B'E$ и $AB = AB'$.

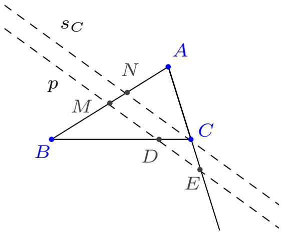
Из $BB' \perp s_A$ и $CF \perp s_A$ следи $BB' \parallel CF$.

Из $B'E \parallel CF$, на основу Талесове теореме следи $\frac{AB'}{AC} = \frac{B'E}{CF}$, тј. $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CF}$ **(1)**.

Са друге стране, из $BE \parallel CF$, на основу Талесове теореме следи $\frac{BD}{CD} = \frac{BE}{CF}$ **(2)**. Тако да из **(1)** и **(2)** следи тврђење, $\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$.

(888) Кроз средиште M странице AB троугла ABC конструисана је права паралелна симетрали CN угла ACB. Та права сече страницу BC у D, а праву AC у E. Доказати да је $BD = AE$.

решење:

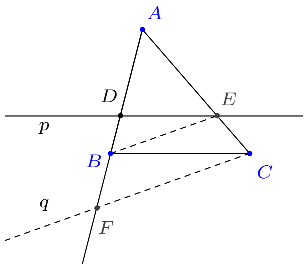


M је средиште странице AB троугла ABC. Нека је s_C симетрала угла ACB, и $s_C \cap AB = \{N\}$. Нека је права p таква да је $M \in p$ и $p \parallel s_C$. Затим, обележимо $p \cap AC = \{E\}$ и $p \cap BC = \{D\}$.
Из $p \parallel s_C$ следи $MD \parallel NC$, па према Талесовој теореми имамо $\frac{BC}{BD} = \frac{BN}{BM}$; при чему је B подеона тачка. Одавде је $\frac{BD+DC}{BD} = \frac{BM+MN}{BM} \Leftrightarrow 1 + \frac{DC}{BD} = 1 + \frac{MN}{BM} \Leftrightarrow \frac{DC}{BD} = \frac{MN}{BM} \Leftrightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{BM}{MN}$ **(1)**.
Ако узмемо да је A подеона тачка онда је $\frac{AC}{AE} = \frac{AN}{AM} \Leftrightarrow \frac{AE-CE}{AE} = \frac{AM-MN}{AM} \Leftrightarrow 1 - \frac{CE}{AE} = 1 - \frac{MN}{AM} \Leftrightarrow \frac{CE}{AE} = \frac{MN}{AM} \Leftrightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{AM}{MN}$ **(2)**.

Одузимањем **(1)-(2)** добијамо $\frac{BD}{DC} - \frac{AE}{CE} = \frac{BM}{MN} - \frac{AM}{MN} = 0$, јер је M средиште странице AB, тј. имамо, $\frac{BD}{DC} = \frac{AE}{CE} \Leftrightarrow BD = AE$; јер је $DC = CE$ што је последица чињенице да је $\triangle CDE$ једнакокрак. Заиста, s_C симетрала угла ACB па је $\angle ACN = \angle DCN$, затим, $\angle CDE = \angle DCN$ (као наизменични) и $\angle CED = \angle ACN$ (као углови са паралелним крацима). Из ових једнакости следи $\angle CDE = \angle CED$, односно, $\triangle CDE$ једнакокрак.

(894) Дат је $\triangle ABC$. Права p која је паралелна страници BC сече дужи AB и AC редом у тачкама D и E. Права q која садржи тачку C и паралелна је правој BE сече праву AB у тачки F. Доказати да је $AB^2 = AD \cdot AF$.

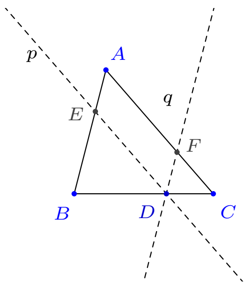
решење:



Из $p \parallel BC$ и A је подеона тачка према Талесовој теореми следи $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ **(1)**. Док из $q \parallel BE$ и A је подеона тачка, према Талесовој теореми следи $\frac{AB}{AF} = \frac{AE}{AC}$ **(2)**. Помножимо ли једнакости (1) и (2) добијамо, $\frac{AB}{AD} \cdot \frac{AB}{AF} = \frac{AC}{AE} \cdot \frac{AE}{AC} = 1 \Leftrightarrow \frac{AB^2}{AD \cdot AF} = 1 \Leftrightarrow AB^2 = AD \cdot AF$.

(895) Дат је $\triangle ABC$ и тачка D на страници BC. Права која садржи тачку D и паралелна је страници AC сече страницу AB у тачки E, а права која садржи тачку D и паралелна је страници AB сече страницу AC у тачки F. Доказати да је $\frac{AE}{AB} + \frac{AF}{AC} = 1$.

решење:



Права p садржи тачку D и $p \parallel AC$. Затим, $p \cap AB = \{E\}$, тако да је $DE \parallel AC$. Са друге стране, права q садржи тачку D и $q \parallel AB$. Даље, $q \cap AC = \{F\}$, па је $DF \parallel AB$.
Из $DE \parallel AC$, и B је подеона тачка, према Талесовој теореми имамо, $\frac{AB}{BE} = \frac{BC}{BD} \Leftrightarrow \frac{BE}{AB} = \frac{BD}{BC} \Leftrightarrow \frac{AB-AE}{AB} = \frac{BC-DC}{BC} \Leftrightarrow 1 - \frac{AE}{AB} = 1 - \frac{DC}{BC} \Leftrightarrow \frac{AE}{AB} = \frac{DC}{BC}$ **(1)**.
Из $DF \parallel AB$ и C је подеона тачка, према Талесовој теореми иамамо, $\frac{CF}{AC} = \frac{CD}{BC} \Leftrightarrow \frac{AC-AF}{AC} = \frac{BC-BD}{BC} \Leftrightarrow 1 - \frac{AF}{AC} = 1 - \frac{BD}{BC} \Leftrightarrow \frac{AF}{AC} = \frac{BD}{BC}$ **(2)**.
Сабирањем (1) и (2) добијамо $\frac{AE}{AB} + \frac{AF}{AC} = \frac{DC}{BC} + \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{BC} = 1$.

проф. И.Јоксимовић