(A)

1) У равни су дати вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
Конструисати векторе: $\vec{v_1} = 2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b}$ и $\vec{v_2} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$.

2) Нека су $\vec{i}$ и $\vec{j}$ линеарно независни вектори. Одредити број k тако да вектори $\vec{x}$ и $\vec{y}$ буду колинеарни, ако је: $\vec{x} = \vec{i} + k\vec{j}$, $\vec{y} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$

3) Одредити вредност израза:
a) $2\sin 45^0 + 4\cos 45^0$
b) $\dfrac{\operatorname{tg} 60^0 - \operatorname{tg} 30^0}{\sin 30^0 + \cos 60^0}$

4) Упростити израз $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7} + \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{14}}{2\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{14}}$

5) Одредити остале елементе правоуглог троугла ако је дата хипотенуза $c = 327$ и оштар угао $\alpha = 29^0$

(B)

1) Средња линија троугла паралелна је са трећом страницом и једнака њеној половини. Доказати.

2) Дате су три тачке A, B и C на правој l и тачка M изван те праве. Ако је $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC}$ изразити вектор $\overrightarrow{MC}$ векторима $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$

3) Израчунати тригонометријске функције оштрог угла α ако је $\cos\alpha = \frac{60}{229}$

4) Упростити израз
$$\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right)$$

5) Одредити остале основне елементе правоуглог троугла, ако је дато:
$a = 9\sqrt{3}$ $\quad \gamma = 90^0$ $\quad \alpha = 30^0$

(C)

1) Тачке C и D деле дуж AB на три једнака одсечка. Тачка O је произвољна изван праве AB . Ако је $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, изразити векторе $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{OD}$ помоћу $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2) У равни су дати вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.
Конструисати векторе: $\vec{v_1} = 2\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$ и $\vec{v_2} = \frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$.

3) Израчунати тригонометријске функције оштрог угла α ако је $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$

4) Доказати идентитет
$$\frac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = 2\operatorname{ctg}^2\alpha$$

5) Одредити остале основне елементе правоуглог троугла, ако је дато:
$c = 100$ $\quad \gamma = 90^0$ $\quad \beta = 25^0 47'$.

(D)

1) Нека су M и N средишта страница AB и CD четвороугла $ABCD$. Доказати да је $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$

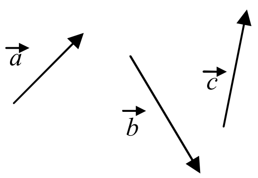
2) Нека су $\vec{i}$ и $\vec{j}$ линеарно независни вектори. Одредити број k тако да вектори $\vec{x}$ и $\vec{y}$ буду колинеарни, ако је: $\vec{x} = 2\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{y} = k\vec{i} - \vec{j}$

3) Одредити вредност израза
a) $\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{\pi}{6}$
b) $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{6} - \operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4}\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{3}$

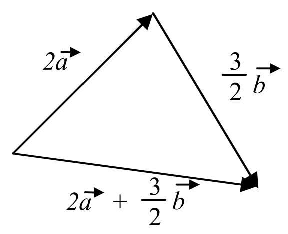
4) Упростити израз $\dfrac{2\operatorname{tg}36^\circ + 4\operatorname{ctg}54^\circ}{2\operatorname{ctg}54^\circ + \operatorname{tg}36^\circ}$

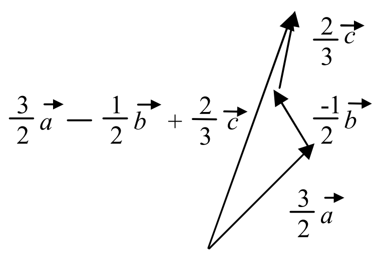
5) Одредити остале основне елементе правоуглог троугла, ако је дато:
$a = 4\sqrt{3}$ $\quad \gamma = 90^0$ $\quad b = 12$

(A1)



јесу задати вектори.





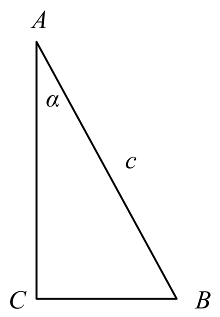
(A2) Нека су $\vec{i}$ и $\vec{j}$ линеарно независни. Ако су вектори $\vec{x}$ и $\vec{y}$ колинеарни, онда су линеарно зависни па се могу изразити један преко другог. Тада за неки број b важи $\vec{y}=b\cdot\vec{x}$, тј. $-2\vec{i}+3\vec{j}=b\cdot\left(\vec{i}+k\vec{j}\right)$. Ово је исто што и $-2\vec{i}+3\vec{j}=b\vec{i}+bk\vec{j}$, односно, $b\vec{i}+2\vec{i}+bk\vec{j}-3\vec{j}=\vec{0}$; $(b+2)\vec{i}+(bk-3)\vec{j}=\vec{0}$. Ова једнакост важи само ако је $b+2=0$ и $bk-3=0$. Дакле, за $b=-2$, добијамо да је $\underline{k=-\frac{3}{2}}$.

(A3) a) $2\sin 45^0+4\cos 45^0=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\underline{=3\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{\operatorname{tg}60^0-\operatorname{tg}30^0}{\sin 30^0+\cos 60^0}=\dfrac{\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=\dfrac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{1}=\underline{\dfrac{2\sqrt{3}}{3}}$

(A4) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}+\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{14}}{2\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{14}}=\dfrac{\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{14}+\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{14}}{2\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{14}}=\dfrac{2\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{14}}{2\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{14}}\underline{=1}$

(A5) $c=327$, $\alpha=29^0$



$\sin\alpha=\dfrac{a}{c}$; $\sin 29°=\dfrac{a}{327}$; $a=327\cdot\sin 29°$;

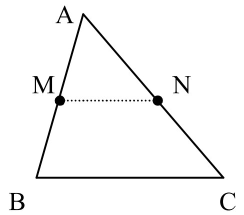
$a=327\cdot 0{,}48481\underline{=158{,}53}$

$\cos\alpha=\dfrac{b}{c}$; $\cos 29°=\dfrac{b}{327}$; $b=327\cdot\cos 29°$

$b=327\cdot 0{,}8746\underline{=286}$

$\underline{\beta=61^0}$

(B1)



доказ: Нека је M средиште странице AB и нека је N средиште странице AC ΔABC.

Тада је $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$, а такође $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$. Сабирањем ове две једнакости добија се $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$

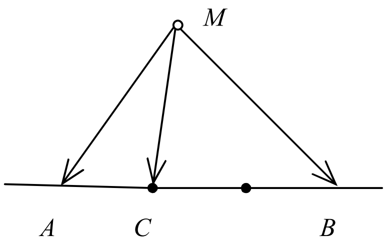
$$2\overrightarrow{MN} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}) + \overrightarrow{BC} + (\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{AN})$$

$$2\overrightarrow{MN} = \vec{0} + \overrightarrow{BC} + \vec{0}$$

$2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC}$, Дакле, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Како је $\overrightarrow{MN}$ вектор изражен преко вектора $\overrightarrow{BC}$ то значи да имају исти правац тј. да је $MN \parallel BC$ и при томе је $MN = \frac{1}{2}BC$.

(B2)



$$\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AC};\quad \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MA} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} \rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}$$

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \tfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}\right)$$

$$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{MB} - \tfrac{1}{3}\overrightarrow{MA}$$

$$\overrightarrow{MC} = \tfrac{2}{3}\overrightarrow{MA} + \tfrac{1}{3}\overrightarrow{MB}$$

(B3) $\cos\alpha = \frac{60}{229}$; $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\left(\frac{60}{229}\right)^2} = \sqrt{\frac{229^2-60^2}{229^2}} = \sqrt{\frac{(229-60)(229+60)}{229^2}}$

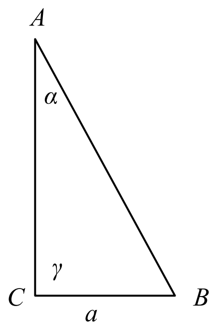
$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{169\cdot 289}{229^2}} = \frac{13\cdot 17}{229} = \underline{\frac{221}{229}};\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{221}{229}}{\frac{60}{229}} = \underline{\frac{221}{60}};\ \underline{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{60}{221}}$$

(B4)

$$\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right) = \left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(\frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right) = \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$= \frac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} \underline{=1}$$

(B5) $a = 9\sqrt{3}$, $\gamma = 90^0$, $\alpha = 30^0$

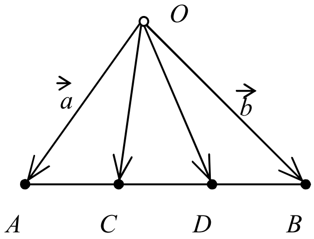


$$\sin\alpha = \frac{a}{c};\ \sin 30° = \frac{9\sqrt{3}}{c};\ \frac{1}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{c};\ \underline{c = 18\sqrt{3}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c};\ \cos 30° = \frac{b}{18\sqrt{3}};\ \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{b}{18\sqrt{3}};\ \underline{b = 27}$$

$$\underline{\beta = 60^0}$$

(C1)



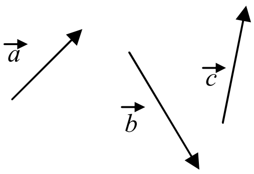
$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$$
$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}$$

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OA}+\tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\tfrac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a})$$
$$\overrightarrow{OC}=\vec{a}+\tfrac{1}{3}\vec{b}-\tfrac{1}{3}\vec{a}$$
$$\underline{\overrightarrow{OC}=\tfrac{2}{3}\vec{a}+\tfrac{1}{3}\vec{b}}$$

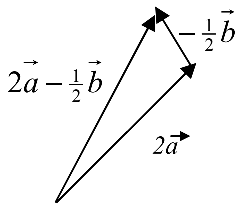
Слично, $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BD}=-\tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

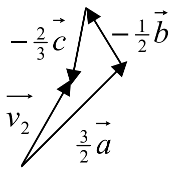
$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OB}-\tfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\tfrac{1}{3}(\vec{b}-\vec{a})\underline{=\tfrac{1}{3}\vec{a}+\tfrac{2}{3}\vec{b}}$$

(C2)



јесу задати вектори.





(C3) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{7}{24}$; $\sin\alpha=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\dfrac{\frac{7}{24}}{\sqrt{1+\left(\frac{7}{24}\right)^2}}=\dfrac{\frac{7}{24}}{\sqrt{\frac{576+49}{576}}}=\dfrac{\frac{7}{24}}{\sqrt{\frac{625}{576}}}=\dfrac{\frac{7}{24}}{\frac{25}{24}}\underline{=\frac{7}{25}}$

$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{24}{7}$; $\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{7}{24}\right)^2}}=\dfrac{1}{\frac{25}{24}}\underline{=\frac{24}{25}}$

(C4) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha(1+\cos\alpha)-\cos\alpha(1-\cos\alpha)}{1-\cos^2\alpha}=$

$=\dfrac{\cos\alpha+\cos^2\alpha-\cos\alpha+\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{2\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\underline{=2\operatorname{ctg}^2\alpha}$

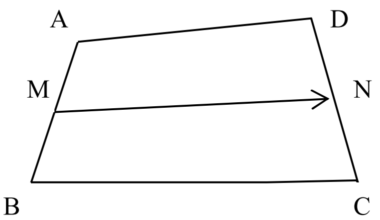
(C5) $c=100$, $\gamma=90^0$, $\beta=25^0 47'$

$\cos\beta=\dfrac{a}{c}$; $\cos 25°47'=\dfrac{a}{100}$; $\cos 25{,}78°=\dfrac{a}{100}$; $0{,}9=\dfrac{a}{100}$; $\underline{a=90}$

$\sin\beta=\dfrac{b}{c}$; $\sin 25°47'=\dfrac{b}{100}$; $\sin 25{,}78°=\dfrac{b}{100}$; $0{,}435=\dfrac{b}{100}$; $\underline{b=43{,}5}$

$\alpha=89°60'-25°47'$; $\underline{\alpha=64°13'}$

(D1)



$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}\\ \\ \overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}\end{array}\right\}$$

$$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}$$

Како је $\overrightarrow{MB}=-\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{CN}=-\overrightarrow{DN}$ то је

$$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}-\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{DN}$$

$$=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{MN}=\tfrac{1}{2}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC})$$

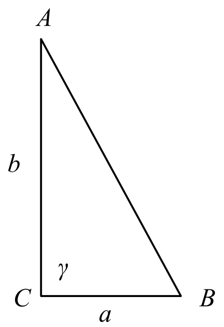
(D2) Нека су $\vec{i}$ и $\vec{j}$ линеарно независни. Ако су вектори $\vec{x}$ и $\vec{y}$ колинеарни, онда су линеарно зависни па се могу изразити један преко другог. Тада за неки број b важи $\vec{y}=b\cdot\vec{x}$, тј. $k\vec{i}-\vec{j}=b\cdot\left(2\vec{i}+\vec{j}\right)$. Ово је исто што и $k\vec{i}-\vec{j}=2b\vec{i}+b\vec{j}$, односно, $(2b-k)\vec{i}+(b+1)\vec{j}=\vec{0}$. Ова једнакост важи само ако је $b+1=0$ и $2b-k=0$. Дакле, за $b=-1$, добијамо да је $\underline{k=-2}$.

(D3) a) $\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=\underline{\frac{1+\sqrt{3}}{2}}$

b) $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=1\cdot\sqrt{3}-1\cdot\sqrt{3}\underline{=0}$

(D4) $\frac{2\operatorname{tg}36^\circ+4\operatorname{ctg}54^\circ}{2\operatorname{ctg}54^\circ+\operatorname{tg}36^\circ}=\frac{2\operatorname{tg}36^\circ+4\operatorname{tg}36^\circ}{2\operatorname{tg}36^\circ+\operatorname{tg}36^\circ}=\frac{6\operatorname{tg}36^\circ}{3\operatorname{tg}36^\circ}\underline{=2}$

(D5)



$a=4\sqrt{3}$, $\gamma=90^0$, $b=12$

$c=\sqrt{144+48}=\sqrt{48\cdot4}=\sqrt{64\cdot3}\underline{=8\sqrt{3}}$

$\sin\alpha=\frac{a}{c}$; $\sin\alpha=\frac{4\sqrt{3}}{8\sqrt{3}}$; $\sin\alpha=\frac{1}{2}$; $\underline{\alpha=30^0}$

$\underline{\beta=60^0}$