(A)

1) Колико се шестоцифрених бројева може саставити од цифара 0,1,2,3,4,5 уз услов да се свака цифра појављује тачно једном и да су парне цифре једна уз другу. (напомена: 0 је парна цифра)

2) Написати у облику разломка број: $0{,}15(74)$

3) Без употребе дигитрона, одредити између која два узастопна цела броја се налази број $a = \frac{4}{\sqrt{5}-1}$?

4) Наћи све реалне бројеве x такве да важи: $\left|3x - \frac{2}{3}\right| > \frac{4}{3}$

5) У скупу од седам тачака постоји тачно шест тројки колинеарних тачака и не постоје четири тачке које су колинеарне. Колико различитих правих одређују тачке овог скупа?

(B)

1) Дати су четворочлани скупови A={a,b,c,d} и M={1,2,3,4}. Колико има 1 – 1 и NA пресликавања f : A → M?

2) Одредити супремум скупа
$$M = \left\{0, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \ldots\right\}$$

3) Наћи све реалне бројеве x такве да важи: $\frac{1}{5} < |x| < \frac{3}{4}$

4) Ако су $a, b \in \mathbf{Q}$, да ли је број $a + b\sqrt{2}$ рационалан или ирационалан? Доказати тврђење.

5) Дат је скуп од n тачака, међу којима не постоји ниједна тројка колинеарних тачака. Колико тачака садржи тај скуп ако је број правих одређених тим тачкама три пута већи од броја тачака?

(C)

1) На полици се налази 14 књига, од којих су 6 на руском, 3 на енглеском и 5 на француском језику. На колико различитих начина се могу распоредити књиге на полици, ако се књиге на истом језику морају налазити једна уз другу?

2) Одредити супремум скупа
$$M = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \ldots\right\}$$

3) Ако је $a = 2b = -\frac{1}{2}$, $x = -2$, $y = \frac{3}{5}$, израчунати вредност израза: $\frac{a-b}{x(y-2)} - \frac{2a+b}{y(x+1)}$

4) Наћи све реалне бројеве x такве да важи: $||2x+1|-5| > 2$

5) У скупу од 10 тачака постоји тачно 6 четворки компланарних тачака. Колико равни одређује ових 10 тачака? (компланарне тачке су тачке једне равни)

(D)

1) У купеу једног воза налазе се две клупе, окренуте једна према другој са по пет места. Од десет путника, четири жели да седи у смеру кретања воза, троје у супротном смеру, а преосталима је свеједно. На колико начина се путници могу распоредити на места у купеу?

2) Написати у облику разломка број: $0,(142857)$

3) Ако су $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$ ирационални бројеви, а $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$ рационалан, доказати да су бројеви $\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\alpha}+2\boldsymbol{\beta}$ ирационални.

4) Наћи све реалне бројеве x такве да је: $|2x-1| > 3$

5) Дато је седам равни таквих да се сваке две од њих секу. Колико је највише правих одређено њиховим пресецима?

(A1) услов је да су парне цифре једна уз другу (0 је парна цифра)

1. врста догађаја: формирање 6 – цифеног броја уз услове: да се цифра појављује само једном и да су парне цифре једна уз другу.
2. реализација догађаја: пошто имамо 3 непарне цифре : 1, 3 и 5 у случају да је прва цифра непарна имамо три могућности за постављање парних цифара:

N_1 П N_2 N_3 (према принципу производа) = $3 \cdot 3! \cdot 2 \cdot 1$

N_1 N_2 П N_3 = $3 \cdot 2 \cdot 3! \cdot 1$

N_1 N_2 N_3 П = $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3!$

Према принципу збира имамо $3 \cdot 36 = 108$.

У случају да је прва цифра парна онда имамо следећу могућност:

П N_1 N_2 N_3 (према принципу производа) = $2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3! = 24$, па према принципу збира укупан број 6 – цифрених бројева једнак је 108 + 24 = $\underline{132}$.

(A2) $x = 0{,}15(74) \Leftrightarrow 100x = 15{,}(74) \Leftrightarrow 100x = 15 + 0{,}(74) \Leftrightarrow 100x = 15 + y$ (1)

$y = 0{,}(74) \Leftrightarrow 100y = 74 + 0{,}(74) \Leftrightarrow 100y = 74 + y \Leftrightarrow 99y = 74 \Leftrightarrow y = \frac{74}{99}$. Заменом у (1)

(1) $\Leftrightarrow 100x = 15 + \frac{74}{99} \Leftrightarrow 100x = \frac{99 \cdot 15 + 74}{99} \underline{\Leftrightarrow x = \frac{1559}{9900}}$

(A3) $a = \dfrac{4}{\sqrt{5}-1} \cdot \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}+1} = \dfrac{4(\sqrt{5}+1)}{5-1} = \sqrt{5}+1$. Како је $2 < \sqrt{5} < 3$, онда је $2+1 < \sqrt{5}+1 < 3+1$ тј. $\underline{3 < a < 4}$.

(A4)

$$\begin{aligned} \left|3x - \tfrac{2}{3}\right| > \tfrac{4}{3} \quad &\Leftrightarrow \quad 3x - \tfrac{2}{3} > \tfrac{4}{3} \ \vee \ 3x - \tfrac{2}{3} < -\tfrac{4}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad 3x > \tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{3} \ \vee \ 3x < -\tfrac{4}{3} + \tfrac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad 3x > 2 \ \vee \ 3x < -\tfrac{2}{3} \\ &\Leftrightarrow \quad x > \tfrac{2}{3} \ \vee \ x < -\tfrac{2}{9} \\ &\Leftrightarrow \quad x < -\tfrac{2}{9} \ \vee \ x > \tfrac{2}{3} \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\tfrac{2}{9}) \cup (\tfrac{2}{3}, +\infty) \end{aligned}$$

(A5) 7 тачака; 6 тројки колинеарних.

1. врста догађаја: конструкција праве
2. реализација догађаја: за конструкцију праве потребне су две тачке.

   а. Под претпоставком да не постоји ниједна тројка колинеарних тачака укупан број правих би био $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$

   б. Како једна тројка неколинеарних тачака одређује тачно три различите праве, онда три колинеарне тачке, пошто одређују једну праву, умањују укупан број правих за 2. Таквих тројки има 6, према томе укупан број правих је $21 - 6 \cdot 2 = 21 - 12 = 9$ правих.

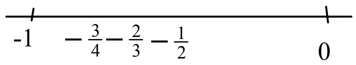
(B1) A={a,b,c,d} и M={1,2,3,4}

$f : A \underset{NA}{\overset{1-1}{\rightarrow}} M$?

Број пресликавања је једнак броју пермутација елемената скупа M тј. $P_4 = 4! = 24$.

$$f_1 : \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

(B2) $M = \left\{0, -\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, ...\right\}$. Распоред вредности на бројној оси је:



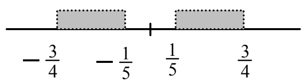
Овде, јасно, видимо да је $\sup M = 0$.

(B3) $x \in R$; $\frac{1}{5} < |\,x\,| < \frac{3}{4} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{5} < |\,x\,| \;\wedge\; |\,x\,| < \frac{3}{4}$

$$\Leftrightarrow (x > \tfrac{1}{5} \;\vee\; x < -\tfrac{1}{5}) \wedge (-\tfrac{3}{4} < x < \tfrac{3}{4})$$

$$\Leftrightarrow -\tfrac{3}{4} < x < -\tfrac{1}{5} \;\vee\; \tfrac{1}{5} < x < \tfrac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\tfrac{3}{4}, -\tfrac{1}{5}) \cup (\tfrac{1}{5}, \tfrac{3}{4})$$



(B4) $a, b \in Q,\;\; a + b\sqrt{2} \in Q$?

Претпоставимо да је $a + b\sqrt{2} = r, \quad r \in Q$

$$\Leftrightarrow b\sqrt{2} = r - a, \quad r - a \in Q$$

$\Leftrightarrow \sqrt{2} = \dfrac{r-a}{b}, \quad \dfrac{r-a}{\mathrm{b}} \in Q$ и $\sqrt{2} \notin Q$. Према томе, $a + b\sqrt{2} \notin Q$

(B5) n тачака и ниједна тројка колинеарних тачака.
Врста догађаја: формирање праве. Према принципу производа за избор пара тачака имамо $n(n-1)$ могућности . Овај производ делимо са 2 јер пар тачака (A и B одређују једну праву)

$\dfrac{n(n-1)}{2} = 3n$; $n(n-1) = 6n$; $n - 1 = 6$; $\underline{n = 7}$.

(C1) 14 књига на полици; 6 на руском, 3 на енглеском и 5 на француском.

Врста догађаја: распоређивање књига на полици под условом да су књиге на истом језику једна поред друге.

Реализација догађаја: унутар сваке скупине књига имамо премештања која износе редом:

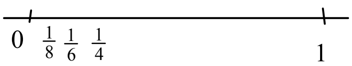
За руске: 6!

За енглеске: 3!

За француске: 5!

А затим, имамо 3! премештања ових група, тако да је према принципу производа укупан број премештања једнак: $3! \cdot (6! \cdot 3! \cdot 5!) = 6 \cdot 720 \cdot 6 \cdot 120 = 3110400$

(C2) $M = \left\{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, ...\right\}$. Распоред вредности на бројној оси је:



Овде, јасно, видимо да је $\sup M = \frac{1}{4}$.

(C3) Ако је $a = 2b = -\frac{1}{2}$, $x =$ -2, $y = \frac{3}{5}$, израчунати вредност израза:

$$\frac{a-b}{x(y-2)} - \frac{2a+b}{y(x+1)} = \frac{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{-2(\frac{3}{5}-2)} - \frac{-1-\frac{1}{4}}{\frac{3}{5}(-2+1)} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{14}{5}} + \frac{\frac{5}{4}}{-\frac{3}{5}} = -\frac{5}{4\cdot 14} - \frac{5\cdot 5}{3\cdot 4} =$$

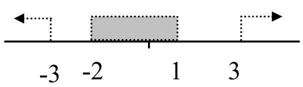
$$= -\frac{5}{4}\left(\frac{1}{14} + \frac{5}{3}\right) = -\frac{5}{4}\cdot\frac{3+70}{42} = -\frac{365}{168}$$

(C4) $x \in R$; $||2x+1|-5| > 2 \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} |2x+1|-5 > 2, & |2x+1|-5 \geq 0 \\ -|2x+1|+5 > 2, & |2x+1|-5 < 0 \end{Bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} |2x+1| > 7, & |2x+1| \geq 5 \\ |2x+1| < 3, & |2x+1| < 5 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} |2x+1| > 7 \\ |2x+1| < 3 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2x+1 < -7 \ \vee \ 2x+1 > 7 \\ -3 < 2x+1 < 3 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} 2x < -8 \vee 2x > 6 \\ -4 < 2x < 2 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \begin{Bmatrix} x < -4 \vee x > 3 \\ -2 < x < 1 \end{Bmatrix}$$



$$\Leftrightarrow x < -4 \ \vee \ -2 < x < 1 \ \vee \ x > 3$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -4) \cup (-2, 1) \cup (3, +\infty)$$

(C5) 10 тачака и 6 четворки компланарних. Колико равни одређује ових 10 тачака?

1. врста догађаја: формирање равни
2. реализација догађаја: за одређивање једне равни потребне су три неколинеарне тачке.

   Претпоставимо да нема компланарних четворки тачака, тада је укупан број равни једнак $\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{6} = 120$

   Једна четворка тачака одређује $\frac{4\cdot 3\cdot 2}{3!} = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{6} = 4$ равни, у случају да нису компланарне, али како су компланарне, тај број равни се смањује за 3. Како је 6 четворки компланарних тачака онда број равни треба умањити за $6 \cdot 3 = 18$. Дакле, укупан број равни је 120 – 18 =<u>102</u>.

(D1) У купеу воза имамо две клупе са по 5 места. Од 10 путника 4 жели да седи у смеру кретања, 3 у супротном смеру, а преосталима је свеједно.

1. врста догађаја: распоређивање путника
2. реализација догађаја: 4 путника који желе да седе у смеру кретања (бирају места) могу да се распореде на $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 5!$ начина. 3 путника желе да седе у смеру супротном од кретања; могу да се распореде на $5 \cdot 4 \cdot 3 = V_5^3$ начина, а три преостала путника, којима је свеједно, такође, могу да се распореде на 3! начина. Према принципу производа укупан број распореда је $5! \cdot V_5^3 \cdot 3! = 120 \cdot 60 \cdot 6 = 43200$ начина.

II начин:

3 $\downarrow$ □□□□□

$\uparrow$ □□□□□ 3 свеједно

4

Облик распореда : $A_1 A_2 A_3 A_4 B_1 B_2 B_3 C_1 C_2 C_3$

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 360 \cdot 120 = 43200$$

(D2) $x = 0,(142857) \Leftrightarrow 1000000x = 142857,(142857) \Leftrightarrow 1000000x = 142857 + 0,(142857)$
$\Leftrightarrow 1000000x = 142857 + x \Leftrightarrow 999999x = 142857 \Leftrightarrow x = \frac{142857}{999999} \Leftrightarrow x = \frac{142857}{142857 \cdot 7} \Leftrightarrow x = \frac{1}{7}$

(D3) $\alpha, \beta \notin Q$ и $\alpha + \beta \in Q$, доказати да су $\alpha - \beta, \ \ \alpha + 2\beta \notin Q$.

Доказ: Из $\beta \notin Q \Rightarrow -\beta \notin Q \Rightarrow -2\beta \notin Q$. Ставимо $-2\beta = -2\beta$ (1)

Из $\alpha + \beta \in Q$ следи да је $\alpha + \beta = r$, и $r \in Q$ (2) Сабирањем једнакости (1) и (2) добијамо, $\alpha + \beta - 2\beta = r - 2\beta \Leftrightarrow \alpha - \beta = r - 2\beta$. Претпоставимо да је $\alpha - \beta \in Q$. Онда је $r - 2\beta = r_1$ и $r_1 \in Q$, односно, $-2\beta = r_1 - r \in Q$, што је апсурд. Дакле, $\alpha - \beta \notin Q$.

$\alpha + 2\beta = \alpha + \beta + \beta = r + \beta$, и $r \in Q$. Претпоставимо да је $r + \beta = r_1 \in Q$

Онда $\beta = r_1 - r \in Q$, што је апсурд, јер $\beta \notin Q$. Дакле, $\alpha + 2\beta \notin Q$.

(D4) $x \in R$;

$$\begin{aligned} |2x-1| > 3 &\Leftrightarrow 2x-1 < -3 \vee 2x-1 > 3 \\ &\Leftrightarrow 2x < -2 \vee 2x > 4 \\ &\Leftrightarrow x < -1 \vee x > 2 \\ &\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty) \end{aligned}$$

(D5) 7 равни; сваке две се секу. Колико највише правих?

1. врста догађаја: пресек двеју равни је права
2. реализација догађаја: за избор праве, равни бирамо на $\frac{7 \cdot 6}{2} = 21$ начина, што представља укупан број правих.