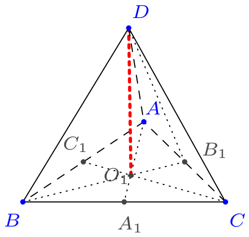
Стереометрија - неки задаци из збирке - тетраедар

Теорема-1: Подножје висине тетраедра је у центру њеног основа.

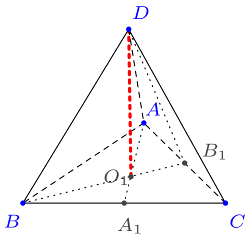
доказ:



Висина $DO_1 = H$ тетраедра $ABCD$ из темена D на основу $\triangle ABC$, има подножје у центру O_1 основе због тога што су све бочне ивице тетраедра једнаке (према теореми о пирамиди чије су све бочне ивице једнаке - подножје њене висине је у центру описаног круга основе пирамиде). Али, пошто је основа једнакостраничан троугао, онда се центар описаног круга основе поклапа и са центром уписаног круга основе, ортоцентром и тежиштем.

264. Висина правилног тетраедра је $h = 2\sqrt{3}$. Колика је ивица тог тетраедра?

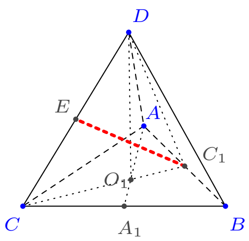
решење:



Дата је висина $O_1D = h = 2\sqrt{3}$. Пошто је тетраедар правилан, онда су његове стране једнакостранични троуглови, једнаких ивица a, а подножје висине O_1 налази се у центру описаног круга основе ABC. Посматрањем $\triangle BB_1D$ закључићемо да је једнакокрак; $BB_1 = DB_1$. Троугао ABC је једнакостраничан, тражене странице a, па је $BB_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, односно, $BO_1 = \frac{2}{3}BB_1 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Тада је из правоуглог троугла BO_1D, применом Питагорине теореме, $a^2 = (\frac{a\sqrt{3}}{3})^2 + (2\sqrt{3})^2 = \frac{3a^2}{9} + 12$, тј. $9a^2 = 3a^2 + 108 \Leftrightarrow 6a^2 = 108 \Leftrightarrow a^2 = 18 \Leftrightarrow \underline{a = 3\sqrt{2}}$.

265. Правилан тетраедар $ABCD$ има ивице дужине 2cm. Колика је удаљеност ивица AB и CD?

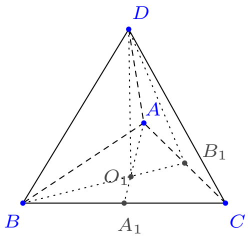
решење:



Да би одредили удаљеност ивица AB и CD, треба направити раван пресек тетраедра и равни која је нормална на основи ABC и бочној страни ABD. Та раван ће садржати висину тетраедра DO_1, и биће нормална на ивицу AB у тачки C_1. При томе, дужи настале у пресеку CC_1 и DC_1 јесу висине једнакостраничних троуглова ABC и ABD. Пошто је $ABC \cong ABD$, онда је $\triangle DC_1C$ једнакокрак, а његова висина C_1E јесте растојање између ивица AB и CD. Ако обележимо са a ивицу тетраедра, биће $CC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Из правоуглог троугла C_1EC и Питагорине теореме, имамо $C_1E = d(AB, CD) = \sqrt{(CC_1)^2 - (\frac{1}{2}a)^2} = \sqrt{3-1} = \underline{\sqrt{2}}$ cm.

266. Одредити запремину правилног тетраедра чије ивице имају дужину a.

решење:



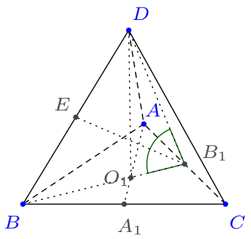
Основа тетраедра $ABCD$ је једнакостранични $\triangle ABC$ чија је површина $B=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. За одређивање запремине тетраедра потребно је да одредимо висину $DO_1=H$. Посматрамо ли $\triangle BB_1D$ који је једнакокрак $BB_1 = DB_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, његова висина из темена D на страницу BB_1 поклапа се са висином тетраедра из истог темена, па према томе, O_1 је у центру основе тетраедра и дели дуж BB_1 у размери $2:1$. Тада је $O_1B_1 = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Из правоуглог $\triangle DO_1B_1$, према Питагориној теореми, $H = \sqrt{(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2-(\frac{a\sqrt{3}}{6})^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4}-\frac{3a^2}{36}} = \sqrt{\frac{24a^2}{36}} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Запремина тетраедра је $V=\frac{1}{3}B\cdot H = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot a\sqrt{\frac{2}{3}} = \underline{\frac{a^3\sqrt{2}}{12}}$.

267. Ако је дата запремина V правилног тетраедра, наћи дужину ивице и његову површину.

решење:
Знајући да је запремина правилног тетраедра $V_t = V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, одавде имамо $a^3\sqrt{2} = 12V \Leftrightarrow a^3 = \frac{12V}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 6V\sqrt{2} \Leftrightarrow a = \sqrt[3]{6V\sqrt{2}}$, јесте дужина ивице, а за површину требамо $a^2 = \sqrt[3]{36V^2\cdot 2} = \sqrt[3]{72V^2} = \sqrt[3]{8\cdot 9V^2} = 2\sqrt[3]{9V^2}$. Пошто се површ правилног тетраедра састоји од четири једнакостранична троугла, биће $P_t = 4\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3} = \underline{2\sqrt{3}\sqrt[3]{9V^2}}$.

272. Израчунати углове диедара правилног тетраедра.

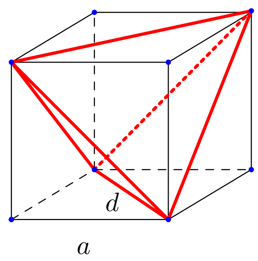
решење:



Код правилног тетраедра сви углови диедара су једнаки. Посматрајмо, на пример, угао $\angle BB_1D$. Раван која одређује тај угао нормална је на раван основе $\triangle ABC$, на бочну страну $\triangle ACD$, и на заједничку им ивицу AC. Према томе, $BB_1\perp AC$, и $DB_1\perp AC$, па пошто су BB_1 и DB_1 висине подударних троуглова ABC и ACD, то је $BB_1 = DB_1$, тј. $\triangle BB_1D$ је једнакокрак. Његова висина из темена B_1 јесте симетрала угла $\angle BB_1D$, чије подножје E полови ивицу BD. Из правоуглог троугла B_1EB, код кога је, $\frac{x}{2} = \frac{1}{2}\angle BB_1D$, имамо $\sin\frac{x}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, а $\cos\frac{x}{2} = \sqrt{1-\frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, па је $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{2}{3}-\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

273. У коцку је уписан тетраедар тако да су му ивице дијагонале страна коцке. Израчунати однос запремине коцке и запремине тетраедра.

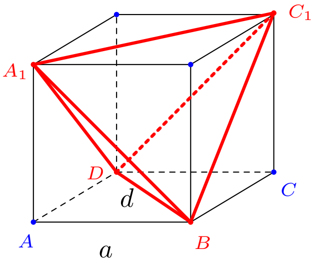
решење:



Ако претпоставимо да нам је позната формула запремине тетраедра странице x, $V_t = \frac{x^3\sqrt{2}}{12}$, онда је задатак једноставан. Пошто је страница тетраедра дијагонала d коцке странице a, тј. $d = a\sqrt{2}$, онда је запремина тетраедра $V_t = \frac{d^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3\sqrt{2}^3\sqrt{2}}{12} = \frac{a^3}{3}$. Запремина коцке странице a је $V_k = a^3$, и коначно, однос запремина је $\frac{V_k}{V_t} = \frac{a^3}{\frac{a^3}{3}} = \frac{3}{1}$.

274. Четири темена коцке од којих ниједан пар не припада истој ивици одређују правилни тетраедар. Колика је површина тог тетраедра ако је дужина ивице коцке једнака 2?

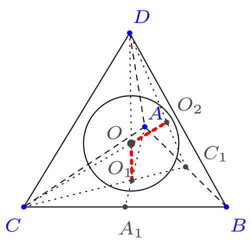
решење:



Четири темена коцке која одговарају услову задатка јесу, нпр. BD и A_1C_1. Као што са слике видимо, то су дијагонале бочних страна коцке. Ако их обележимо са d то су, заправо, ивице правилног тетраедра A_1BDC_1. Пошто је страна правилног тетраедра једнакостранични троугао, површина тетраедра биће, $P_t = 4 \cdot \frac{d^2\sqrt{3}}{4} = d^2\sqrt{3}$. Дужина ивице коцке је $a = 2$, па је $d = a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$. Дакле, $P_t = \underline{8\sqrt{3}}$.

-1-. Одредити полупречник сфере уписане у тетраедар странице a.

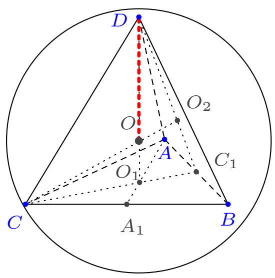
решење:



Код правилног тетраедра, основа и све бочне стране су подударни једнакостранични троуглови. Висина тетраедра DO_1 има подножје у центру O_1 основе ABC, а такође, и преостале висине из темена основе на бочне стране имају подножја у центрима бочних страна, нпр. CO_2 има подножје у центру O_2 бочне стране ABD. Висине DO_1 и CO_2 леже у истој равни; која пролази теменима C и D и нормална је на ABC и ABD, па је $DO_1 \cap CO_2 = \{O\}$. У правоуглом $\triangle DO_1C_1$ имамо $OO_1 = OO_2$, биће, заправо, тражени полупречник уписане сфере; обележимо га са r. Знајући да је $O_1C_1 = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ и $DC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, преко Питагорине теореме сазнајемо да је $DO_1 = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Из сличности $\triangle DO_1C_1 \sim \triangle DO_2O$; имају заједнички оштар угао код темена D и оба су правоугли, следи $\frac{OO_2}{DO_2} = \frac{O_1C_1}{DO_1} \Leftrightarrow \frac{r}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{6}}{a\sqrt{\frac{2}{3}}} \Leftrightarrow \underline{r = \frac{a\sqrt{6}}{12}}$.

-2-. Одредити полупречник сфере описане око тетраедара странице a.

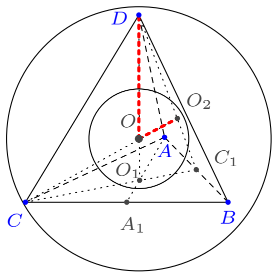
решење:



Према теореми-1, подножје O_1 висине из темена D на основу $\triangle ABC$ јесте у центру описаног круга основе. Према томе, $O_1A = O_1B = O_1C$, а из подударности $\triangle O_1AD \cong \triangle O_1BD \cong \triangle O_1CD$, следи да се равни AA_1D, BB_1D и CC_1D секу по правој DO_1, тј. висини тетраедра. Ако, према слици, посматрамо једну од тих равни, нпр. CC_1D, можемо закључити да се код једнакокраког $\triangle CC_1D$ висине DO_1 и CO_2 секу у тачки O, и из подударности $\triangle COO_1 \cong \triangle DOO_2$; (USU) следи $OC = OD$; на сличан начин показујемо и да је $OB = OD$, односно, да је $OA = OD$, што значи да је O центар описане сфере око тетраедра $ABCD$. У даљем, довољно је посматрати правоугли троугао DO_1C_1. С обзиром да је $DC_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, и $O_1C_1 = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, биће $DO_1 = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{3a^2}{36}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$, и $DO_2 = \frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
Из сличности $\triangle DO_1C_1 \sim \triangle DO_2O$; имају заједнички оштар угао код темена D и оба су правоугли, следи $\frac{DO}{DO_2} = \frac{DC_1}{DO_1} \Leftrightarrow \frac{R}{\frac{a\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{\frac{2}{3}}} \Leftrightarrow R = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{\frac{2}{3}}} \Leftrightarrow R = \frac{a\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow \underline{R = \frac{a\sqrt{6}}{4}}$.

442. Нека је $ABCD$ правилан тетраедар ивице a. Ако је $k(O, R)$ описана, а $k(O, r)$ уписана сфера датог тетраедра, наћи однос $R : r$.

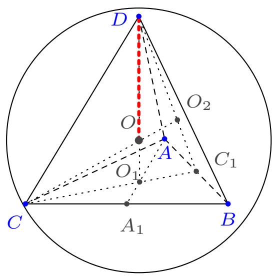
решење:



Према слици, полупречник описане сфере биће $OD = R$, док је полупречник уписане сфере $OO_2 = r$. При томе, те дужи су, редом, хипотенуза и катета правоуглог $\triangle DO_2O$, који је сличан правоуглом троуглу $\triangle DO_1C_1$. Дакле, кључ решења је у сличности та два троугла; $\triangle DO_1C_1 \sim \triangle DO_2O$. Из те сличности следи $\frac{DO}{OO_2} = \frac{DC_1}{O_1C_1} \Leftrightarrow \frac{R}{r} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \underline{\frac{3}{1}}$.

281. Израчунати запремину правилног тетраедра уписаног у сферу полупречника r.

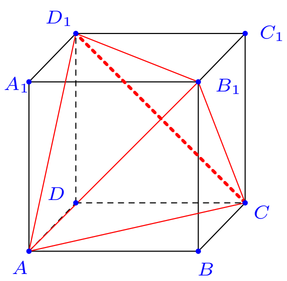
решење:



Знајући да је запремина тетраедра ивице a једнака $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, задатак нам је да изразимо запремину преко попупречника r сфере описане око тетраедра. Дакле, наћи релацију између a и r. Из правоуглог $\triangle DO_1C_1$, према Питагориној теореми, висина тетраедра је $H = DO_1 = \sqrt{(DC_1)^2 - (O_1C_1)^2} = \sqrt{(\frac{a\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} - \frac{a^2}{12}} = \sqrt{\frac{8a^2}{12}} = \sqrt{\frac{2a^2}{3}} = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.
Из сличности, $\triangle DOO_2 \sim \triangle DO_1C_1$, следи $\frac{DO}{DO_2} = \frac{DC_1}{DO_1} \Leftrightarrow \frac{r}{\frac{2}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a\sqrt{\frac{2}{3}}} \Leftrightarrow r\sqrt{3} = \frac{3a}{2\sqrt{2}} \Leftrightarrow a = \frac{2}{3}r\sqrt{6}$.
$V = \frac{1}{12}\frac{8}{27}r^3\sqrt{6^3}\sqrt{2} = \frac{1}{12}\frac{8}{27}r^3\sqrt{3^3 2^4} = \frac{1}{12}\frac{8}{27}r^3 \cdot 3 \cdot 2^2\sqrt{3} = \underline{\frac{8}{27}r^3\sqrt{3}}$.

282. Дат је квадар $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Израчунати однос запремина тетраедра ACB_1D_1 и квадра.

решење:



Било би незгодно да директно одређујемо запремину тетраедра. Слика нам поможе, и намеће идеју да то урадимо индиректно. Од запремине квадра одузећемо запремине четири тростране пирамиде: $ABCB_1$, $B_1CC_1D_1$, $ACDD_1$ и $AA_1B_1D_1$. Ове пирамиде су све подударне, па је њихова укупна запремина $V_{4p} = 4 \cdot \frac{1}{3}\frac{a \cdot b}{2} \cdot c = \frac{2}{3}abc$. Запремина квадра је $V_k = abc$, па ће запремина тетраедра бити $V_t = V_k - V_{4p} = abc - \frac{2}{3}abc = \frac{1}{3}abc$. Према томе, однос запремина тетраедра и квадра је $\frac{V_t}{V_k} = \frac{\frac{1}{3}abc}{abc} = \underline{\frac{1}{3}}$.

проф. И.Јоксимовић